# 1.2 Cálculo de límites de manera gráfica y numérica

- **Estimar un límite utilizando los métodos numérico y gráfico.**
- **Aprender diferentes formas en las que un límite puede no existir.**
- **Estudiar y utilizar la definición formal de límite.**

## Introducción a los límites

Suponer que se pide dibujar la gráfica de la función $f$ dada por

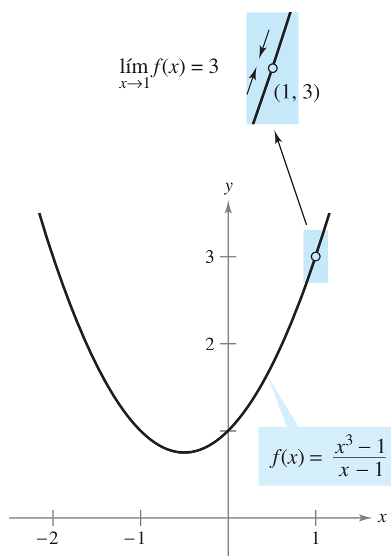
$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}, \quad x\neq 1.$$

Para todos los valores distintos de $x = 1$, es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en $x = 1$, no está claro qué esperar. Para obtener una idea del comportamiento de la gráfica de $f$ cerca de $x = 1$, se pueden usar dos conjuntos de valores de $x$, uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha, como se ilustra en la tabla.

$x$ se aproxima a 1 por la izquierda. → ← $x$ se aproxima a 1 por la derecha.

| $x$ | 0.75 | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1 | 1.001 | 1.01 | 1.1 | 1.25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.313 | 2.710 | 2.970 | 2.997 | ? | 3.003 | 3.030 | 3.310 | 3.813 |

$f(x)$ se aproxima a 3. → ← $f(x)$ se aproxima a 3.




El límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 1 es 3
**Figura 1.5**

Como se muestra en la figura 1.5, la gráfica de $f$ es una parábola con un hueco en el punto (1, 3). A pesar de que $x$ no puede ser igual a 1, se puede acercar arbitrariamente a 1 y, en consecuencia, $f(x)$ se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites, se podría escribir

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

Esto se lee "el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a 1 es 3".

Este análisis conduce a una descripción informal de límite. Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número $L$ cuando $x$ se aproxima a $c$ por cualquiera de los dos lados, entonces el **límite** de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $c$, es $L$. Esto se escribe

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

**EXPLORACIÓN**

El análisis anterior proporciona un ejemplo de cómo estimar un límite de *manera numérica* mediante la construcción de una tabla, o de *manera gráfica*, al dibujar un esquema. Calcular el siguiente límite de forma numérica al completar la tabla.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

| $x$ | 1.75 | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2 | 2.001 | 2.01 | 2.1 | 2.25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

Luego utilizar una herramienta de graficación para estimar el límite.

### EJEMPLO 1 Estimación numérica de un límite

Evaluar la función $f(x) = x/(\sqrt{x+1} - 1)$ en varios puntos cercanos a $x = 0$ y usar el resultado para estimar el límite:

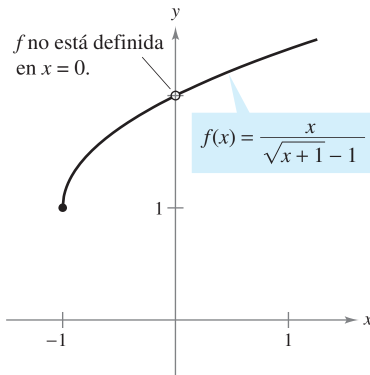
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

**Solución** En la siguiente tabla se registran los valores de $f(x)$ para diversos valores de $x$ cercanos a 0.

$x$ se aproxima a 0 por la izquierda. → ← $x$ se aproxima a 0 por la derecha.

| $x$ | $-0.01$ | $-0.001$ | $-0.0001$ | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.99499 | 1.99950 | 1.99995 | ? | 2.00005 | 2.00050 | 2.00499 |

$f(x)$ se aproxima a 2. → ← $f(x)$ se aproxima a 2.




El límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a 0 es 2
**Figura 1.6**

De los datos mostrados en la tabla, se puede estimar que el límite es 2. Dicho resultado se confirma por la gráfica de $f$ (ver la figura 1.6).

Observar que en el ejemplo 1, la función no está definida en $x = 0$ y aún así $f(x)$ parece aproximarse a un límite a medida que $x$ se aproxima a 0. Esto ocurre con frecuencia, y es importante percatarse de que la *existencia o inexistencia de $f(x)$ en $x = c$ no guarda relación con la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $c$.*

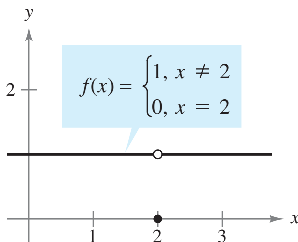
### EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Encontrar el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a 2, donde $f$ se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

**Solución** Puesto que $f(x) = 1$ para todos los $x$ distintos de $x = 2$, se puede concluir que el límite es 1, como se muestra en la figura 1.7. Por tanto, se puede escribir

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1.$$




El límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a 2 es 1
**Figura 1.7**

El hecho de que $f(2) = 0$ no influye en la existencia ni en el valor del límite cuando $x$ se aproxima a 2. Por ejemplo, si se hubiera definido la función como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

el límite sería el mismo.

Hasta este punto de la sección, se han calculado los límites de manera numérica y gráfica. Cada uno de estos métodos genera una estimación del límite. En la sección 1.3 se estudiarán técnicas analíticas para evaluarlos. A lo largo de este curso, se trata de desarrollar el hábito de utilizar este método de árbol para resolver problemas.

1. Método numérico — Construir una tabla de valores.
2. Método gráfico — Elaborar una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico.
3. Método analítico — Utilizar álgebra o cálculo.

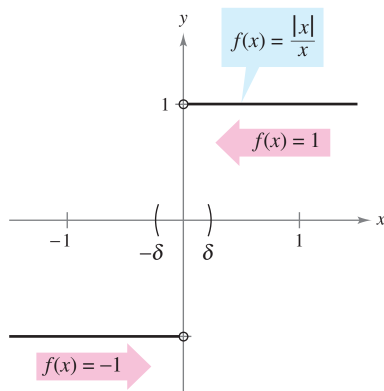
## Límites que no existen

En los tres ejemplos siguientes se examinarán algunos límites que no existen.

### EJEMPLO 3 Comportamiento diferente por la derecha y por la izquierda

Demostrar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$




El $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe

**Figura 1.8**

**Solución** Considerar la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$. De la figura 1.8 y de la definición de valor absoluto.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ Definición de valor absoluto

se observa que

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Esto significa que, independientemente de cuánto se aproxime $x$ a 0, existirán tanto valores positivos como negativos de $x$ que darán $f(x) = 1$ y $f(x) = -1$. De manera específica, si $\delta$ (letra griega *delta* minúscula) es un número positivo, entonces los valores de $x$ que satisfacen la desigualdad $0 < |x| < \delta$ se pueden clasificar los valores de $|x|/x$ de la siguiente manera:

$(-\delta, 0)$ — Los valores negativos de $x$ dan como resultado $|x|/x = -1$.

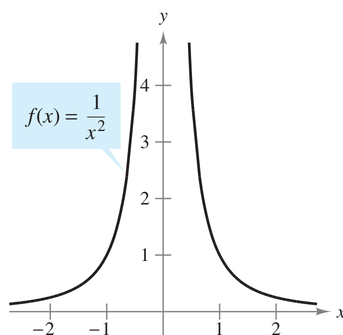
$(0, \delta)$ — Los valores positivos de $x$ dan como resultado $|x|/x = 1$.

Debido a que $|x|/x$ tiende a un número diferente por la derecha del 0, por la izquierda que entonces el límite $\lim_{x \to 0} (|x|/x)$ no existe.

### EJEMPLO 4 Comportamiento no acotado

Analizar la existencia del límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}.$$




El $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe

**Figura 1.9**

**Solución** Sea $f(x) = 1/x^2$. En la figura 1.9 se puede observar que a medida que $x$ se aproxima a 0 tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x)$ crece sin límite. Esto quiere decir que, eligiendo un valor de $x$ cercano a 0, se puede lograr que $f(x)$ sea tan grande como se quiera. Por ejemplo, $f(x)$ será mayor que 100 si elegimos valores de $x$ que estén entre $\frac{1}{10}$ y 0. Es decir:

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 100.$$

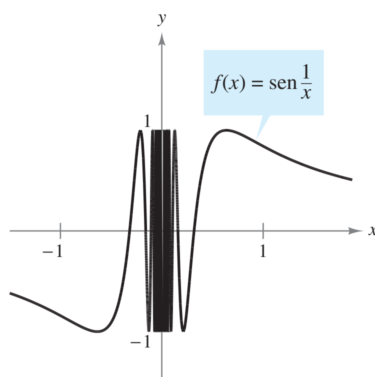
Del mismo modo, se puede obligar a que $f(x)$ sea mayor que 1 000 000 de la siguiente manera:

$$0 < |x| < \frac{1}{1\,000} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 1\,000\,000$$

Puesto que $f(x)$ no se aproxima a ningún número real $L$ cuando $x$ se aproxima a 0, se puede concluir que el límite no existe.

## EJEMPLO 5 Comportamiento oscilante

Analizar la existencia del límite $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.




El $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe
**Figura 1.10**

**Solución** Sea $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. En la figura 1.10 se puede observar que, cuando $x$ se aproxima a 0, $f(x)$ oscila entre $-1$ y 1. Por consiguiente, el límite no existe puesto que, por pequeño que se elija δ, siempre es posible encontrar $x_1$ y $x_2$ que disten menos de δ unidades de 0 tales que $\operatorname{sen}(1/x_1) = 1$ y $\operatorname{sen}(1/x_2) = -1$, como se muestra en la tabla.

| $x$ | $2/\pi$ | $2/3\pi$ | $2/5\pi$ | $2/7\pi$ | $2/9\pi$ | $2/11\pi$ | $x \to 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen $(1/x)$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | El límite no existe. |

**COMPORTAMIENTOS ASOCIADOS A LA NO EXISTENCIA DE UN LÍMITE**

1. $f(x)$ se aproxima a números diferentes por la derecha de $c$ que por la izquierda.
2. $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite a medida que $x$ se aproxima a $c$.
3. $f(x)$ oscila entre dos valores fijos a medida que $x$ se aproxima a $c$.

Existen muchas otras funciones interesantes que presentan comportamientos inusuales. Una de las que se cita con mayor frecuencia es la *función de Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional.} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

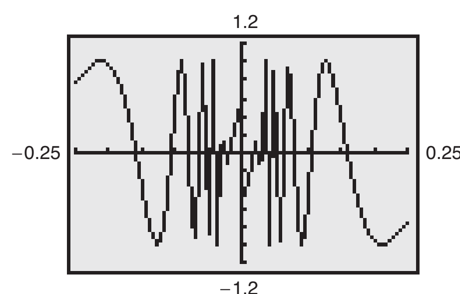
Puesto que esta función *carece de límite* en cualquier número real $c$, *no es continua* en cualquier número real $c$. La continuidad se estudiará con más detalle en la sección 1.4.




**PETER GUSTAV DIRICHLET (1805-1859)**

En el desarrollo temprano del cálculo, la definición de una función era mucho más restrictiva que en la actualidad, y “funciones” como la de Dirichlet no se hubieran tomado en consideración. La definición moderna de función se debe al matemático alemán Peter Gustav Dirichlet.

**CONFUSIÓN TECNOLÓGICA** Cuando se utilice una herramienta de graficación para investigar el comportamiento de una función cerca del valor de $x$ en el que se intenta evaluar su límite, recordar que no siempre se puede confiar en las imágenes dibujadas. Al utilizar una herramienta de graficación para dibujar la gráfica de la función del ejemplo 5 en un intervalo que contenga al 0, es muy probable que obtenga una gráfica incorrecta, como la que se muestra en la figura 1.11. El motivo por el cual una herramienta de graficación no puede mostrar la gráfica correcta radica en que la gráfica cuenta con oscilaciones infinitas en cualquier intervalo que contenga al 0.




Gráfica incorrecta de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$
**Figura 1.11**